Beklaryan Armen Levonovich, Central Economics and Mathematics Institute of RAS, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student, e-mail: abeklaryan@hse.ru

УДК 517.977

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

© **М.С. Близорукова**

Ключевые слова:управление; метод экстремального сдвига.
Исследуется задача управления параболическим уравнением. Предполагается, что проводятся неточные измерения решения этого уравнения. Указывается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм формирования управления по принципу обратной связи, обеспечивающий отслеживание решением заданного уравнения решения уравнения, подверженного возмущению.

1. Введение. Пусть V и H — действительные гильбертовы пространства; пространство V вложено в пространство H плотно и непрерывно: $V \subset H = H^* \subset V^*$.

Рассматривается параболическое уравнение

$$\dot{y}(t) + Ay(t) = v(t) + f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0 \in \{z \in V : Az \in H\}.$$

Пусть выполнено условие коэрцитивности

$$\langle Ay, y\rangle + \omega|y|_H^2 \geqslant c|y|_V^2 \quad \forall y \in V,$$

$f(\cdot) \in L_2(T; H)$ — заданная функция, v — управление, производная $\dot{y}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений. Символы $|\cdot|_V$ и $|\cdot|_H$ означают соответственно нормы в V и H, а символы $(\cdot, \cdot)$ и $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в H и двойственность между V и V^*.

В качестве примера может быть рассмотрено уравнение теплопроводности. В этом случае оператор A задается следующим образом

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_i}(a_{ij}(t, \eta)\frac{\partial y}{\partial \eta_j}).$$

Следуя [1, стр. 115], функцию $x(\cdot) \in W(T_\vartheta; V) = \{x(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; V) : \dot{x}(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; V^*)\}$, удовлетворяющую соотношению $(\dot{x}(t), z) + \langle Ax(t), z\rangle = (v(t) + f(t), z)$ $\forall z \in V$ при п.в. $t \in T_\vartheta$ будем называть решением уравнения (1) на промежутке $T_\vartheta = [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$ и обозначать символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, v(\cdot))$. В силу [2, теорема 3.3], при любых $\vartheta \in (0, +\infty)$ и $v(\cdot) \in \in L_2(T_\vartheta; U)$ уравнение (1) имеет единственное решение со свойством: $x(\cdot) \in W^{1,2}(T_\vartheta; H) \cap C(T_\vartheta; V)$, где $W^{1,2}(T_\vartheta; H) = \{w(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; H) : \dot{w}(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; H)\}$. Функцию $x(t)$, $t \in T$, назовем решением уравнения (1) на промежутке T, если $x(\cdot)$ есть решение (1) на всяком промежутке T_ϑ, $\vartheta > 0$.

Рассматриваемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Наряду с уравнением (1) имеется еще одно уравнение

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = u(t) + f(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

с начальным состоянием $x(0) = x_0$. Это уравнение (назовем его эталонным) подвержено воздействию некоторого неизвестного управления $u(\cdot) \in P(\cdot)$. Здесь символ $P(\cdot)$ означает множество измеримых (по Лебегу) функций $v(\cdot) : [0, +\infty) \to P$, т. е. множество допустимых управлений. $P \subset H$ — замкнутое и ограниченное множество. Управление $u(\cdot)$, а также отвечающее ему решение $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ уравнения (2) заранее неизвестны. В дискретные моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{+\infty}$ ($\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta_i$) измеряются состояния $y(\tau_i) = y(\tau_i; t_0, y_0, v(\cdot))$ уравнения (1), а также состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; t_0, x_0, u(\cdot))$ уравнения (2). Состояния $y(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — элементы $\xi_i^h \in H$, $i \geqslant 1$, — удовлетворяют неравенствам $|y(\tau_i) - \xi_i^h|_H \leqslant h$, где $h \in (0, 1)$ — ошибка измерения. Будем предполагать, что $|y_0 - x_0|_V \leqslant h$. Необходимо указать алгоритм формирования управления $v = v^h(\cdot)$ в уравнении (1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $y(\cdot)$ этого уравнения решение $x(\cdot)$ уравнения (2). Таким образом, задача, состоит в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $y(\tau_i)$ и $x(\tau_i)$ формирует (по принципу обратной связи) управление $v = v^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1) такое, что отклонение $y(\cdot) = y(\cdot; t_0, y_0, v^h(\cdot))$ от $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ в метрике пространства $C(T_\vartheta; H)$ (каково бы ни было $\vartheta \in (0, +\infty)$) мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Задачи управления параболическими уравнениями в рамках подхода [3] рассмотрены в работах [4–6]. Специфика предлагаемого в настоящей работе алгоритма состоит в том, что он работает на бесконечном промежутке времени.

2. Алгоритм решения. Для каждого $h \in (0, 1)$ фиксируем семейство Δ_h разбиений T моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty},\ \tau_{h,0} = 0,\ \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta_i(h),\ \delta_i(h) \in (0, 1),\ \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i(h) = +\infty\ \forall h \in (0, 1).$$

У с л о в и е 1. Семейство Δ_h таково, что выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \{\delta_i^{3/2}(h)\Big(1 + \sum_{j=0}^{i} \delta_j(h)\Big)\} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}$. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляется элемент $U_h(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h)$ по формуле

$$U_h(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h) = \arg\min\{2(\psi_i^h - \xi_i^h, v)_H : v \in P\}.$$

Затем на вход уравнения (1) при всех $t \in \delta_i$ подается управление вида

$$v^h(t) = U_h(\tau_{h,i}, \xi_i^h, \psi_i^h), \quad t \in \delta_{h,i}, \quad i \geqslant 0,$$

Под действием этого управления решение уравнения (1) переходит из состояния $y^h(\tau_i)$ в состояние $y^h(\tau_{i+1})$. При этом в результате воздействия на уравнение (2) некоторого неизвестного управления $u = u(t)$, $t \in \delta_i$ это уравнение переходит из состояния $x(\tau_i)$ в состояние $x(\tau_{i+1})$. На следующем, $(i+1)$-м шаге, аналогичные действия повторяются.

Справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы* ω, ω_1, c, c_0 *со свойством* $\omega_1 = \omega - cc_0^{-2} < 0$, *и выполнено условие* 1. *Тогда существует такое число* b_1, *что при всех* $t \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$|y^h(t) - x(t)|_H \leqslant \left[c_0^2 h^2 e^{\omega_1 t} + b_1(h + \delta(h))\right]^{1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

2. *Barbu V.* Optimal control of variational inequalities. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

4. *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М.: МГУ, 2009.

5. *Осипов Ю.С., Пандолфи Л., Максимов В.И.* Задача робастного граничного управления: случай краевых условий Дирихле // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 3. С. 310–312.

6. *Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov, V.I.* Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9. № 2. P. 149–162.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда (проект 14-11-00539).

Поступила в редакцию 11 июня 2015 г.

Blizorukova M.S. ON CONTROL OF A PARABOLIC EQUATION WITH FEEDBACK

The control problem of a parabolic equation through inaccurate measurements of its solution is considered. A solution algorithm stable with respect to the informational noise and computational errors, forming (by the feedback principle) a control allowing us to track the solution of an equation which is subject to perturbation by the solution of the given equation, is indicated.

Key words: parabolic equation; dynamical inversion.

Близорукова Марина Сергеевна, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: msb@imm.uran.ru

Blizorukova Marina Sergeevna, Institute for Mathematics and Mechanics of Ural branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: msb@imm.uran.ru